Series de Fourier



Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica





Funciones Periódicas

Sea una función.

Se dice que es periódica cuando existe un numero real , no nulo, tal que:

Entonces se dice que es un periodo para .



OBSERVACION:

Sea una función periódica ft) = $Cos(_1t) + Cos(_2t)$, entonces existen un valor $_1$, $_2$

$$Cos_1(t + T) + Cos_2(t + T) = Cos(_1t) + Cos(_2t)$$

$$= \; = r \;\; Q$$



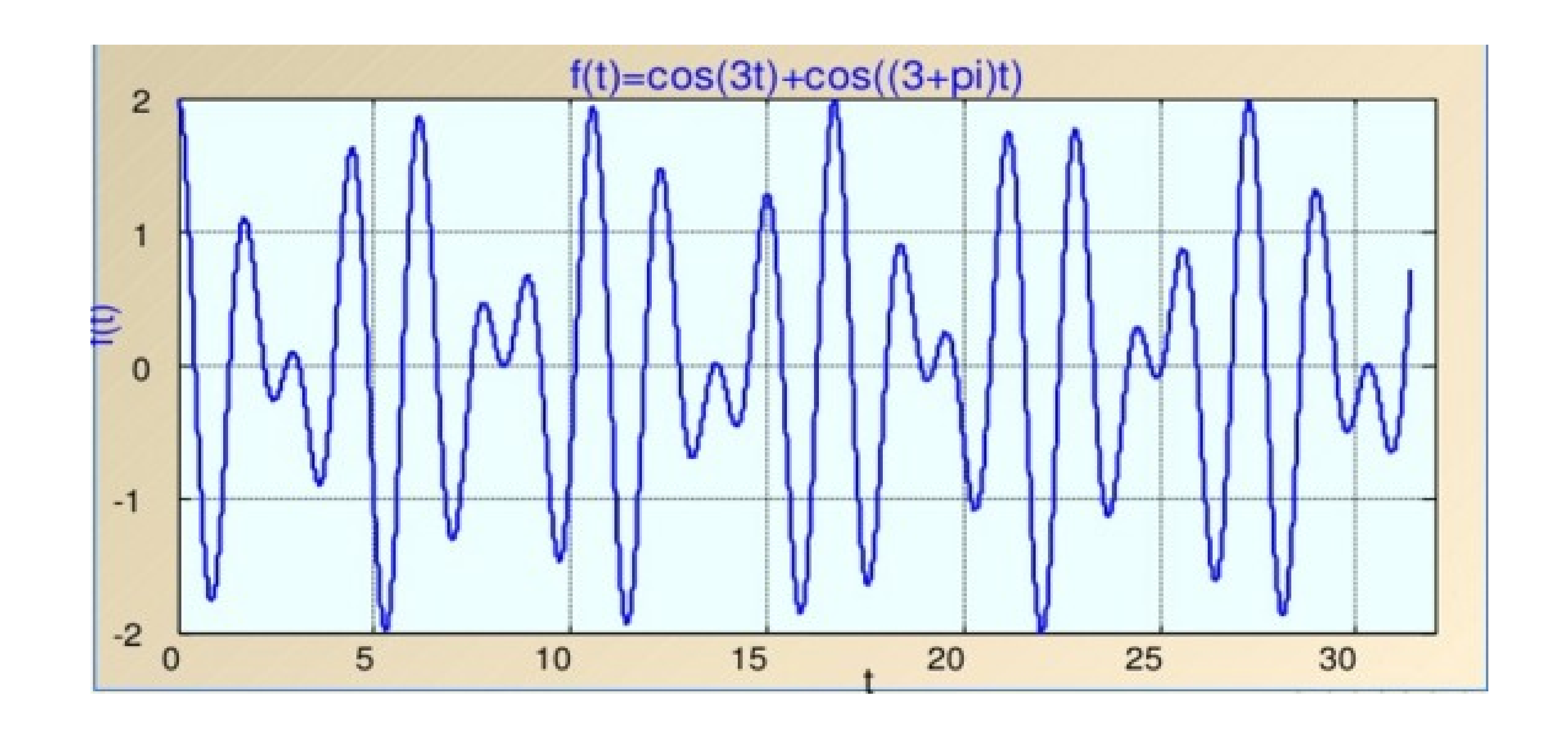
EJEMPLO:

La función:

f = Cos(3t) + Cos(

No es periódica, ya que :

= ; (T)





PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

A) $_0$t)dt = 0 ; m R -

B) $_0$t)dt = 0 ; m R

C) $_0$t)Cos(n$_0$t)dt =

D) $_0$t)Sen(n$_0$t)dt =

E) $_0$t)Cos(n$_0$t)dt = 0 ; m,n R





Proposición:

Sea una función de periodo .

Siendo integrable sobre un intervalo de longitud , y para cualquier   se tiene que.



FUNCIONES ORTOGONALES

Dos funciones son ortogonales en un intervalo si:

$$\left(f_1, f_2\right) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx = 0$$

Ejemplo:

son ortogonales

$$\left(f_1, f_2\right) = \int_{-1}^{1} x^3 (x¿¿2+1) = 0¿$$

$$\left(f_1, f_2\right) = \int_{-1}^{1} x^5 + x^3 = 0$$

$$\left(f_1, f_2\right) = \frac{x^6}{6}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$\left(f_1, f_2\right) = 0$$



CONJUNTOS ORTOGONALES

Un conjunto de funciones de valor real:

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots\}$$

Es ortogonal en un intervalo si:

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \quad m \neq n$$

Ejemplo:

Demuestre que el conjunto
es ortogonal en un intervalo de

Solución:

$$Si\ definimos\ \varphi_0(x) = 1\ y\ \varphi_n(x) = cos\,(nx)$$

$$(\varphi_0, \varphi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(x)\,\varphi_n(x)\,dx \quad n \neq 0$$



$$(\varphi_0, \varphi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx \qquad (\varphi_0, \varphi_n) = \frac{1}{n} sen(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$(\varphi_0, \varphi_n) = \frac{1}{n}\left(sen(n\pi) - sen(-n\pi)\right)$$

$$(\varphi_0, \varphi_n) = 0$$

Ahora definimos $\varphi_n(x) = \cos(nx)$ *y* $\varphi_m(x) = \cos(mx)$

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx \quad n \neq m$$

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\,dx$$

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n} sen(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m-n} sen(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0$$

SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right]$$

Los coeficientes de Fourier serian:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt.$$



Para un caso particular que son las funciones de senos y cosenos cuyo periodo es .

Entonces se tiene:

o





Ejemplo:

Resolver y encontrar el desarrollo de Fourier en la función periódica dada.

SERIE DE FOURIER

Funciones Ortogonales



DEFINICION:

Se dice que dos funciones reales ¿ ¿ y son $a \leq t \leq b$ ortogonales en el intervalo

Si la integral del producto ¿ sobre este intervalo $a \leq t \leq b$ es igual a cero, es decir:

$$\int_a^b f_m(t) * f_n(t)\, dt = 0$$





Observaciones:

- Un conjunto de funciones reales sea $f_1, f_2, \ldots$, que satisface la integral anterior para todos los pares de funciones distintos en el conjunto, que son ortogonales entre si, es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo dado.

- La integral $N\left(f_m(t)\right) = \int_a^b ¿¿$

se llama Norma de la función ¿ en el intervalo $a \leq t \leq b$




Observaciones:

- Un conjunto ortogonal de funciones $f_0, f_1, \ldots, f_m, \ldots$, en el intervalo $a \le t \le b$, tal que cuyas funciones tiene norma 1 satisface las relaciones:

$$\int_a^b f_m(t) * f_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 \; si\, m \ne n,\, n = 0,1,2,\ldots \\ 1 \; si\, m = n,\, n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Un conjunto de este tipo recibe el nombre de conjunto ortonormal de funciones en el intervalo $a \le t \le b$

SERIE DE FOURIER

Calculo de los coeficientes de las series de Fourier



Calculo de los coeficientes de las series de Fourier



- Para, calcular , multipliquemos los dos términos de la serie por dx, e integremos de, todas las integrales del segundo miembro de dicha serie, se anulan, excepto la que multiplica .

Calculo de los coeficientes de las series de Fourier



- Para calcular multipliquemos los dos términos de la serie, por e integremos de todas las integrales del segundo miembro se anulan excepto el factor que multiplica .

Calculo de los coeficientes de las series de Fourier

- Ya sabemos que si m y n son enteros positivos diferentes se verifica

Y que si m y n son enteros positivos iguales o diferentes se verifica



Calculo de los coeficientes de las series de Fourier



- Dando a n valores (0, 1, 2,3...) en

se obtienen todos los coeficientes de los cosenos. Análogamente, se obtiene , multiplicando los dos términos de (1) por , e integrando se verifica

Calculo de los coeficientes de las series de Fourier

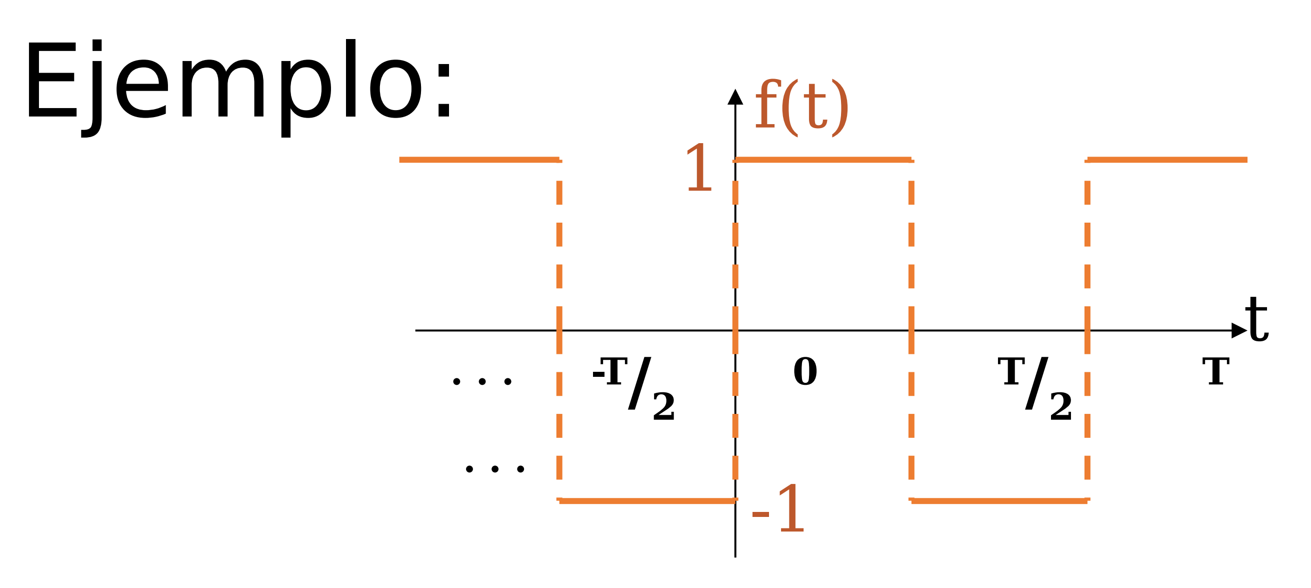


- Entonces si tenemos una función con un periodo T los coeficientes serán. Sea





Ejemplo:



Definimos la función





Con esto hallamos los coeficientes

=

= 0

+)

= 0




UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
SCIENTIA
ET LABOR
LIMA
PERU
1876

-

(

=





- Con lo cual serie de Fourier quedara Si T= 2 y lo cual w=

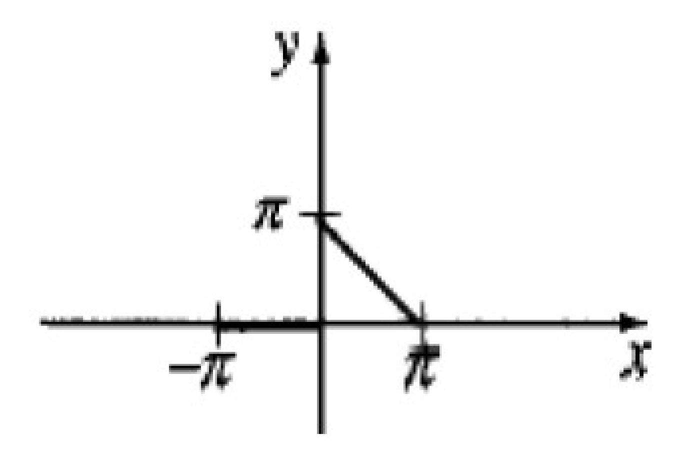
- +



PROBLEMAS.

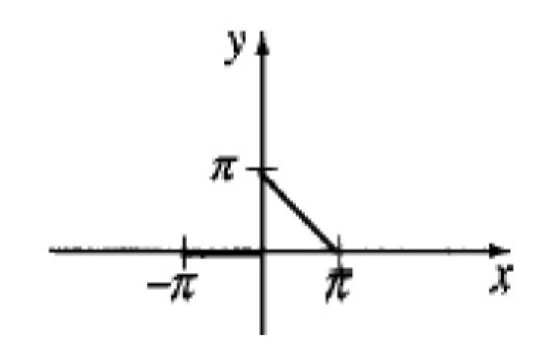
- Desarrolle en una serie de fourier.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ \pi - x & , 0 < x < \pi \end{cases}$$





PROBLEMAS.



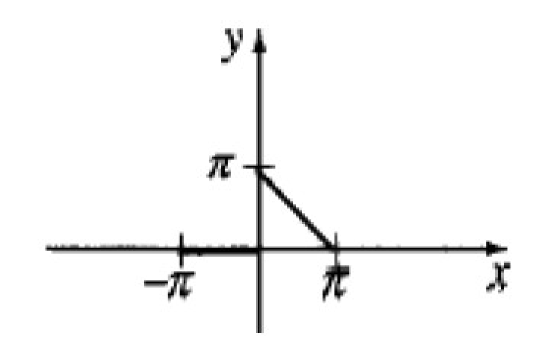
$$f(x)=\begin{cases}0 & ,-\pi<x<0\\ \pi-x & ,0<x<\pi\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx\right]$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\pi x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$



PROBLEMAS.



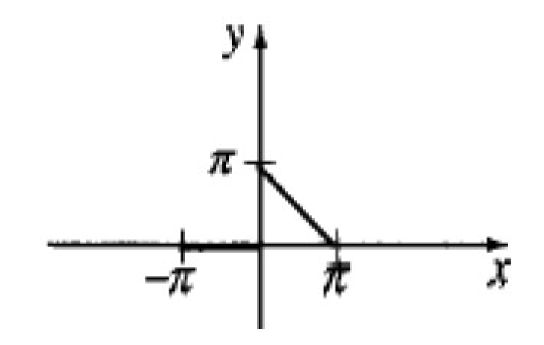
$$f(x)=\begin{cases}0 & ,-\pi<x<0\\ \pi-x & ,0<x<\pi\end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx\right]$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[(\pi-x)\frac{sennx}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen(nx)\,dx=-\left.\frac{\cos(nx)}{\pi n^2}\right|_0^{\pi}$$



PROBLEMAS.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ \pi - x & , 0 < x < \pi \end{cases}$$

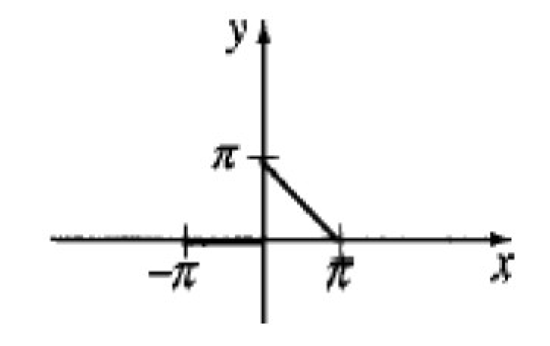
$$a_n = \frac{-\cos n\pi + 1}{\pi n^2}$$

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}$$



PROBLEMAS.

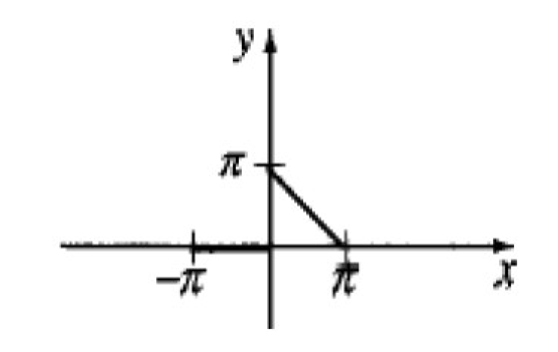
$$f(x)=\begin{cases}0 & ,-\pi<x<0\\ \pi-x & ,0<x<\pi\end{cases}$$



$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,sen\,nx\,dx=\frac{1}{n}$$



PROBLEMAS.



$$f(x)=\begin{cases}0 & ,-\pi<x<0\\ \pi-x & ,0<x<\pi\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1}{n}\,sen\,nx\right\}$$



PROBLEMAS.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -T/2 < x < 0 \\ 1 & , 0 < x < T/2 \end{cases}$$

$=$



PROBLEMAS.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & ,-T/2<x<0 \\ 1 & ,0<x<T/2 \end{cases}$$

+)

$$a_n=0$$



PROBLEMAS.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ,-T/2<x<0\\ 1 & ,0<x<T/2\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)sen(nwx)dx=\frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}-sen(nwx)dx+\int_{0}^{T/2}sen(nwx)dx\right)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\left[\frac{1}{nw}\cos(nwx)\Big|_{-T/2}^{0}-\frac{1}{nw}\cos(nwx)\Big|_{0}^{T/2}\right]=\frac{2}{T}\left[1-\cos(n\pi)-(\cos(n\pi)-1)\right]$$



PROBLEMAS.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ,-T/2<x<0\\ 1 & ,0<x<T/2\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(sen(wt)+\frac{1}{3}sen(3wt)+\frac{3}{5}sen(5wt)\right)$$

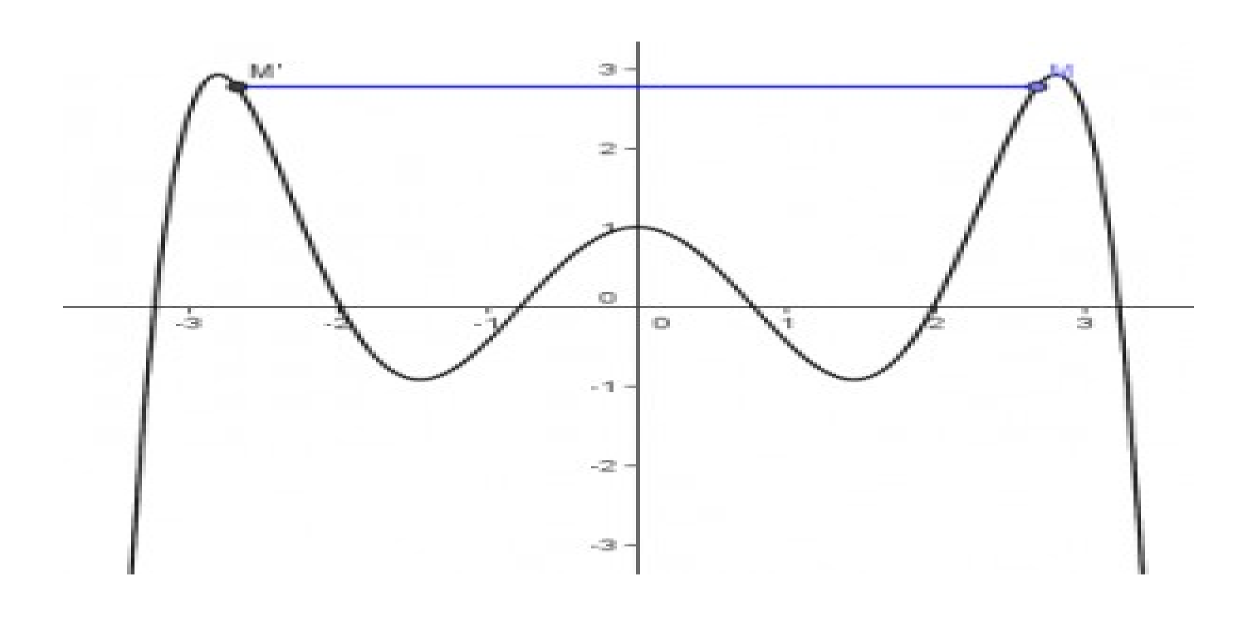
SERIE DE FOURIER

Funciones Pares e Impares



Función par:

Se dice que una función periódica es par o con simetría par si su grafica es simétrica con respecto al eje Y. Es decir matemáticamente si

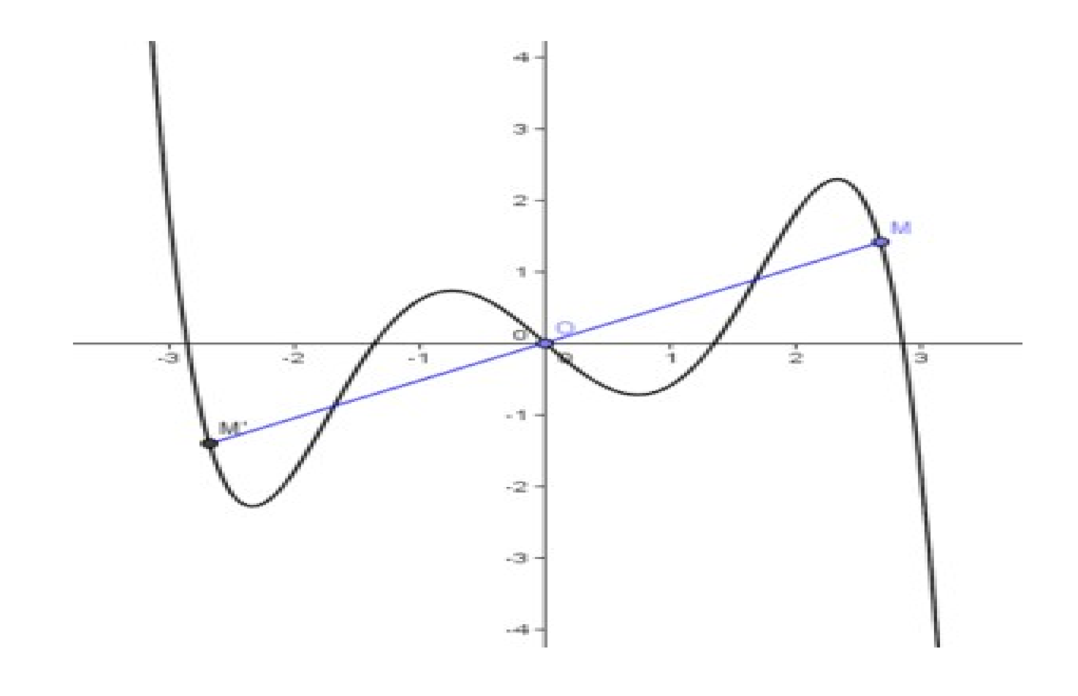






Función impar

Se dice que una función periódica es impar o con simetría impar si su grafica es simétrica con respecto al origen. Es decir matemáticamente si





Función impar

- La función es una función **impar** para todo
- La función es una función **par** para todo n

Lo cual nos lleva a que:

Si es una función par, su serie de Fourier no contendrá senos por lo tanto   para todo n

Si es una función impar, su serie de Fourier no contendrá cosenos por lo tanto   para todo n



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES PARES E IMPARES

1. $Si\ \ f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ son\ funciones\ pares\ entonces\ f.g\ es\ funcion\ par$
2. $Si\ f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ son\ funciones\ impares\ entonces\ f.g\ es\ funcion\ par$
3. $Si\ \ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ es\ una\ funcion\ par\ y\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ es\ una\ funcion\ impar\ entonces\ f.g$ $es\ una\ funcion\ impar$

4. Toda función f(t), se puede expresar como la suma de dos funciones componentes de las cuales una es par y la otra impar.

5. $Si\ la\ funcion\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ es\ impar,\ entonces\ se\ cumple:\ \int_{-a}^{a} f(t)dt=2\int_{0}^{a} f(t)$
6. $Si\ la\ funcion\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ es\ impar,\ entonces\ se\ cumple:\ \int_{-a}^{a} f(t)dt=0$



Función impar

- La función es una función **impar** para todo
- La función es una función **par** para todo n

Lo cual nos lleva a que:

Si es una función par, su serie de Fourier no contendrá senos por lo tanto   para todo n

Si es una función impar, su serie de Fourier no contendrá cosenos por lo tanto   para todo n



Fenómeno de Gibbs

Si la serie de Fourier para una función f(t) se trunca para lograr una *aproximación en suma finita de senos y cosenos*, es natural pensar que a medida que agreguemos más armónicos, la sumatoria se aproximará más a f(t).

Esto se cumple excepto en las discontinuidades de f(t), en donde el error de la suma finita no tiende a cero a medida que agregamos armónicos.

Por ejemplo, consideremos el tren de



Fenómeno de Gibbs

Serie con 1 armónico



Fenómeno de Gibbs



Fenómeno de Gibbs

Serie con 5 armónicos



Fenómeno de Gibbs



Fenómeno de Gibbs

Serie con 13 armónicos

1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1



Fenómeno de Gibbs

Serie con 50 armónicos



Fenómeno de Gibbs

Serie con 100 armónicos



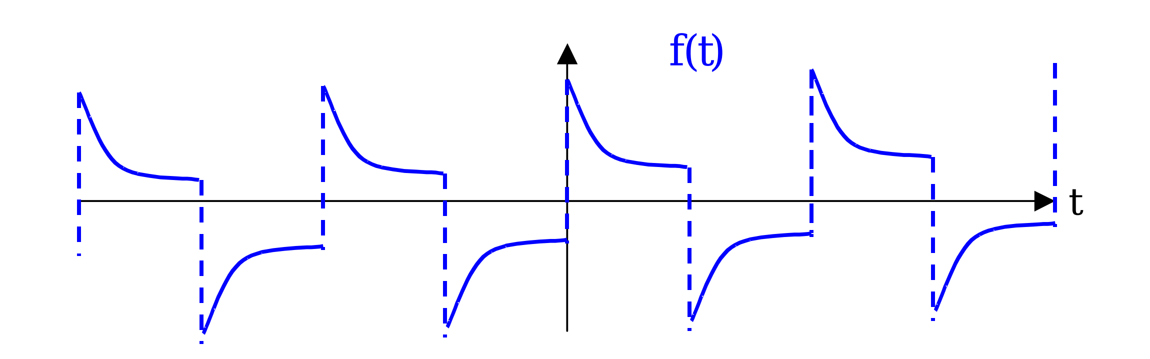
SIMETRIA DE MEDIA ONDA

- Se dice que una función es simétrica de media onda si cumple la propiedad

Es decir si su grafica en las partes negativas son un reflejo de las positivas pero desplazadas medio periodo



SIMETRIA DE MEDIA ONDA





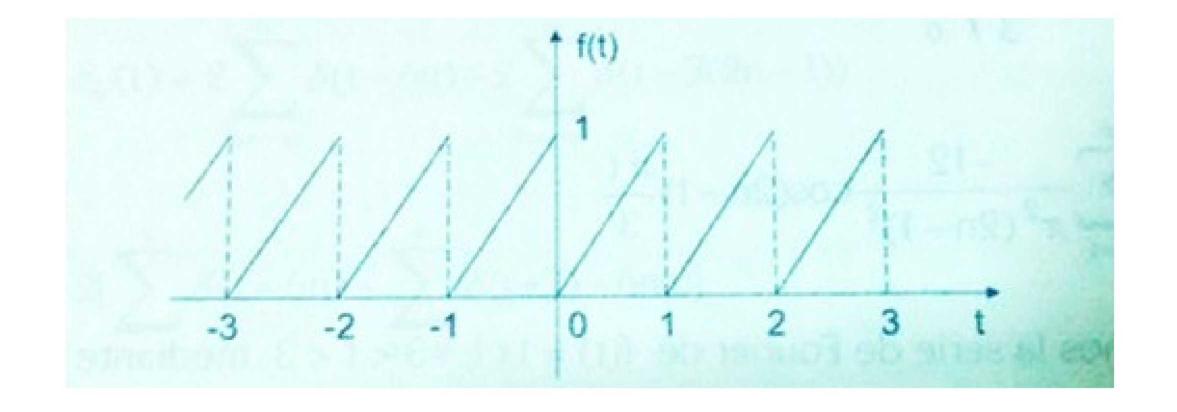
Simetría

Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna			Senos y cosenos
Par			Únicamente cosenos
Impar			Únicamente senos
Media onda			Senos y cosenos impares



PROBLEMAS:

- Encontrar la serie de Fourier de la función f(t) q se muestra en la figura:





PROBLEMAS:

- Encontrar la serie de Fourier de la función f(t) definida por:

$$f(t) = |t| \; para \; t \in \langle -\pi, \pi \rangle \; y \; f(t+2\pi) = f(t)$$



PROBLEMAS:

$$Si\ \ f(t)=\begin{cases} 1 & si\ 8<t<9 \\ t-8 & si\ 9<t<10 \end{cases}$$

- de las condiciones de f(t) para que f(t) tenga una serie de Fourier de las forma :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{2n-1}\cos(2n-1)\omega_0 t+b_{2n-1}\sin(2n-1)\omega_0 t\right]$$

Forma compleja de la serie de Fourier

Consideremos la serie de Fourier para una función periódica *f(t),* con periodo $T = 2\pi/\omega_0$.

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

Es posible obtener una forma alternativa usando las fórmulas de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t})$$

$$sen(n\omega_0 t) = \tfrac{1}{2i}(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t})$$

Sustituyendo:

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \tfrac{1}{2}(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}) + b_n \tfrac{1}{2i}(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t})]$$

Y usando el hecho de que *1/i = -i*:

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\tfrac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega_0 t}]$$

Y definiendo: $c_0 \equiv \tfrac{1}{2} a_0, \quad c_n \equiv \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} \equiv \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

A la expresión obtenida

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

se le llama ***forma compleja de la serie de Fourier*** y sus coeficientes c_n pueden obtenerse a partir de los coeficientes a_n, b_n como ya se dijo, o bien:

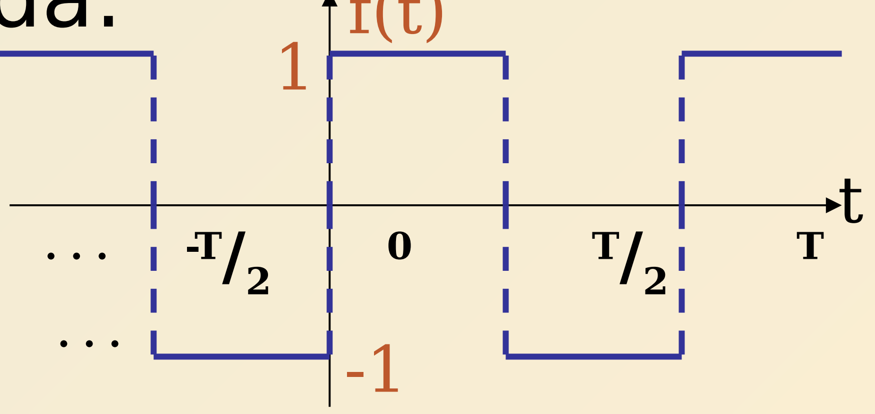
$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$



Forma Compleja de la Serie de Fourier

Ejemplo. Encontrar la forma compleja de la serie de Fourier para la función ya tratada:



Solución 1. Como ya se calcularon los coeficientes de la forma trigonométrica (a_n y b_n):

$$b_n = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] \quad \text{para todo } n$$

y a_n=0 para todo n

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Podemos calcular los coeficientes c_n de:

$$c_n = \frac{1}{2}[a_n - jb_n] = -j\frac{1}{2}\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$c_n = -j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

Entonces la Serie Compleja de Fourier queda

$$f(t) = \frac{2}{\pi}j(\ldots + \frac{1}{5}e^{-j5\omega_0 t} + \frac{1}{3}e^{-j3\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}$$

$$- e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{3}e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{5}e^{j5\omega_0 t} - \ldots)$$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Solución 2. También podemos calcular los coeficientes c_n mediante la integral

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_{T/2}^{T} -\, e^{-jn\omega_0 t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{1}{-jn\omega_o} e^{-jn\omega_0 t}\Big|_0^{T/2} - \frac{1}{-jn\omega_o} e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{T/2}^{T}\right)$$

$$= \frac{1}{-jn\omega_o T}\left[(e^{-jn\omega_0 T/2} - 1) - (e^{-jn\omega_0 T} - e^{-jn\omega_0 T/2})\right]$$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Como $\omega_0 T=2\pi$ y además $e^{\pm j\theta}=\cos\theta\pm j\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$c_n=\frac{1}{-jn\omega_o T}[((-1)^n-1)-(1-(-1)^n)]$$

$$=-j\frac{2}{n\omega_o T}[1-(-1)^n]$$

$$=-j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

Lo cual coincide con el resultado ya obtenido.

Potencia y Teorema de Parseval

El ***promedio*** o ***valor medio*** de una señal cualquiera f(t) en un periodo dado (T) se puede calcular como la altura de un rectángulo que tenga la misma área que el área bajo la curva de f(t)

$$Area = \int_0^T f(t)\,dt$$

Potencia y Teorema de Parseval

De acuerdo a lo anterior, si la función periódica f(t) representa una señal de voltaje o corriente, la ***potencia promedio*** entregada a una carga resistiva de 1 ohm en un periodo está dada por

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2dt$$

Si f(t) es periódica, también lo será $[f(t)]^2$ y el promedio en un periodo será

Potencia y Teorema de Parseval

El teorema de Parseval nos permite calcular la integral de $[f(t)]^2$ mediante los coeficientes com-plejos c_n de Fourier de la función periódica f(t):

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

O bien, en términos de los coeficientes a_n, b_n:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt=\frac{1}{4}a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Potencia y Teorema de Parseval

Una consecuencia importante del teorema de Parseval es el siguiente resultado:

El valor cuadrático medio de una función periódica f(t) es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos, es decir,

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right|^2$$

Donde C_n es la amplitud del armónico n-ésimo y C_0 es la componente de directa.

Potencia y Teorema de Parseval

Para aclarar el resultado anterior es conveniente encontrar la relación entre los coeficientes complejos c_n de la serie

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Y los coeficientes reales C_n de la serie

$$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\right]$$

Donde C_n es la amplitud del armónico

Potencia y Teorema de Parseval

Por un lado $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

Mientras que $|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Entonces, $|c_n| = \frac{1}{2} C_n$ Por lo tanto, $|c_n|^2 = \frac{1}{4} C_n^2$

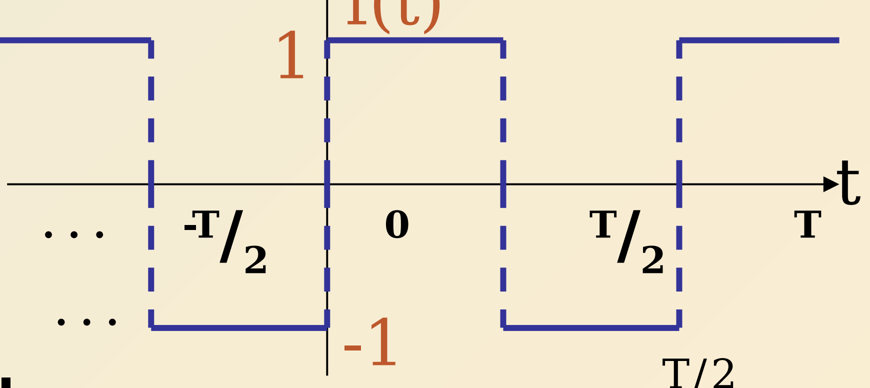
Además, para el armónico $f_n(t) = C_n \left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]$

Su valor rms es $C_n/\sqrt{2}$, por lo tanto su valor cuadrático medio es $C_n^2/2$

Para la componente de directa C_0, su valor rms es $|C_0|$, por lo tanto su valor cuadrático medio será $|C_0|^2$.

Potencia y Teorema de Parseval

Ejemplo. Calcular el valor cuadrático medio de la función f(t):



Solución.

Del teorema de Parseval $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$

y del ejemplo anterior $|c_n| = \frac{1}{|n|\pi}[1-(-1)^n]$

sustituyendo $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{8}{\pi^2}\left[1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\right]$

Potencia y Teorema de Parseval

La serie numérica obtenida converge a

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots=1.2337$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2=\frac{8}{\pi^2}(1.2337)=1$$

Como era de esperarse.

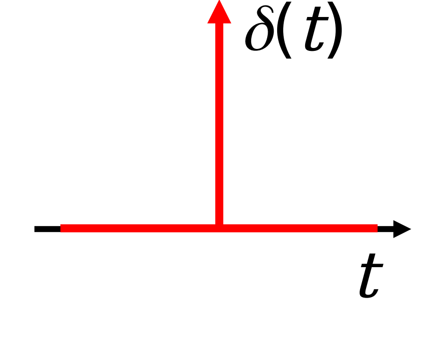
Potencia y Teorema de Parseval

Tarea.

Calcular el valor cuadrático medio para la señal senoidal rectificada de media onda de periodo 2π.

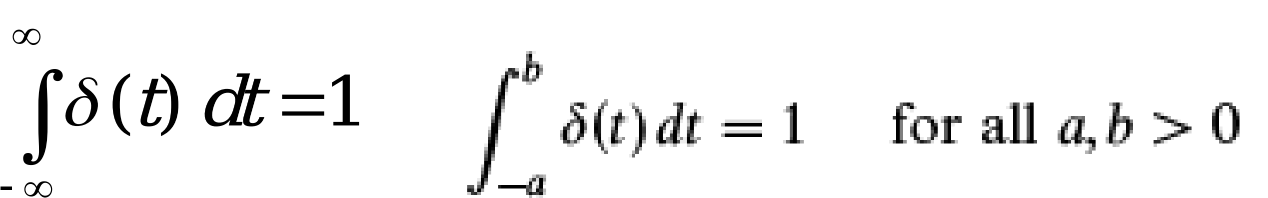


Propiedades de la función δ



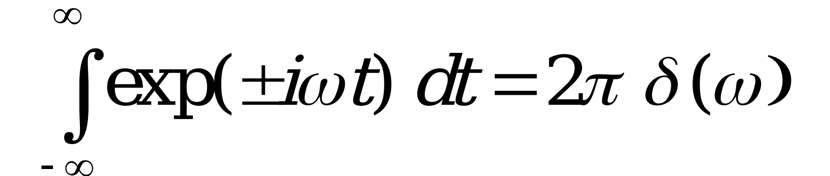
$$\delta(t) = 0 \quad \text{for } t \neq 0,$$

$$\delta(t) = \delta(-t) \qquad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \qquad t\delta(t) = 0.$$



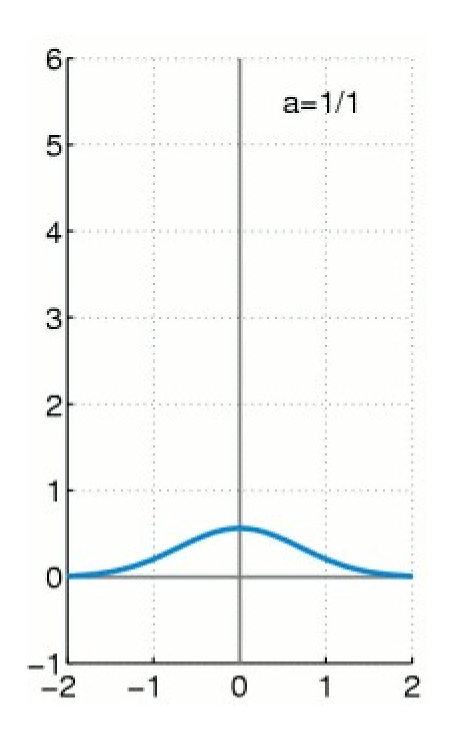
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \qquad \int_{-a}^{b} \delta(t)\, dt = 1 \quad \text{for all } a, b > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f(a)\, dt = f(a)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm i\omega t)\, dt = 2\pi\, \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pm i(\omega - \omega')t]\, dt = 2\pi\, \delta(\omega - \omega')$$



Calcular la serie de Fourier de δ(x):

$$\delta(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\, e^{i\pi jx} \quad \rightarrow \quad c_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-i\pi jx}\,\delta(x)\,dx$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-i\pi(0)x}\,\delta(x)\,dx$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \delta(x)\,dx \qquad \int_{-a}^{b} \delta(t)\,dt = 1 \quad \text{for all } a, b > 0$$

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

Calcular la serie de Fourier de δ(x):

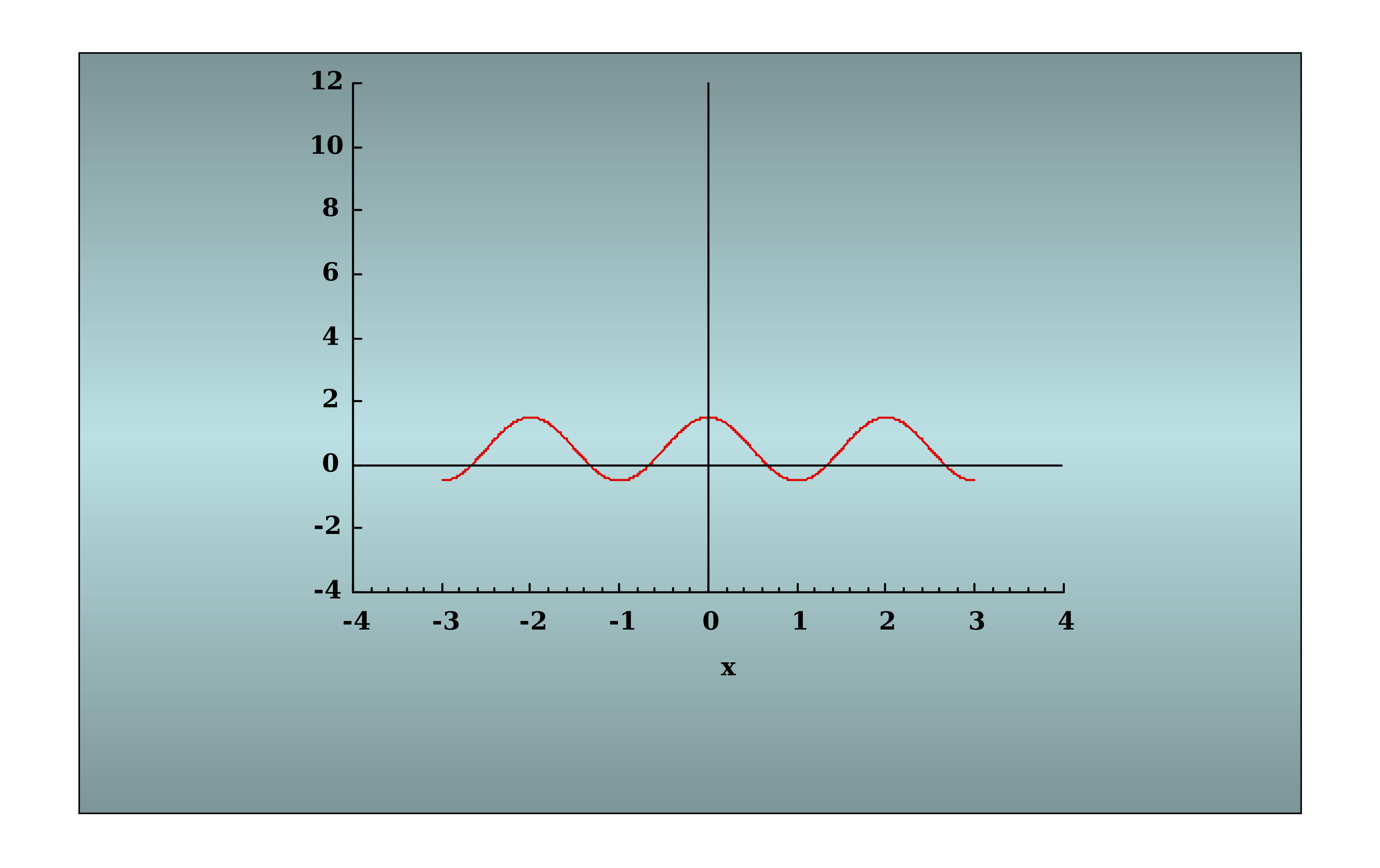
$$\delta(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\, e^{i\pi jx} \quad \rightarrow \quad c_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-i\pi jx}\,\delta(x)\,dx$$

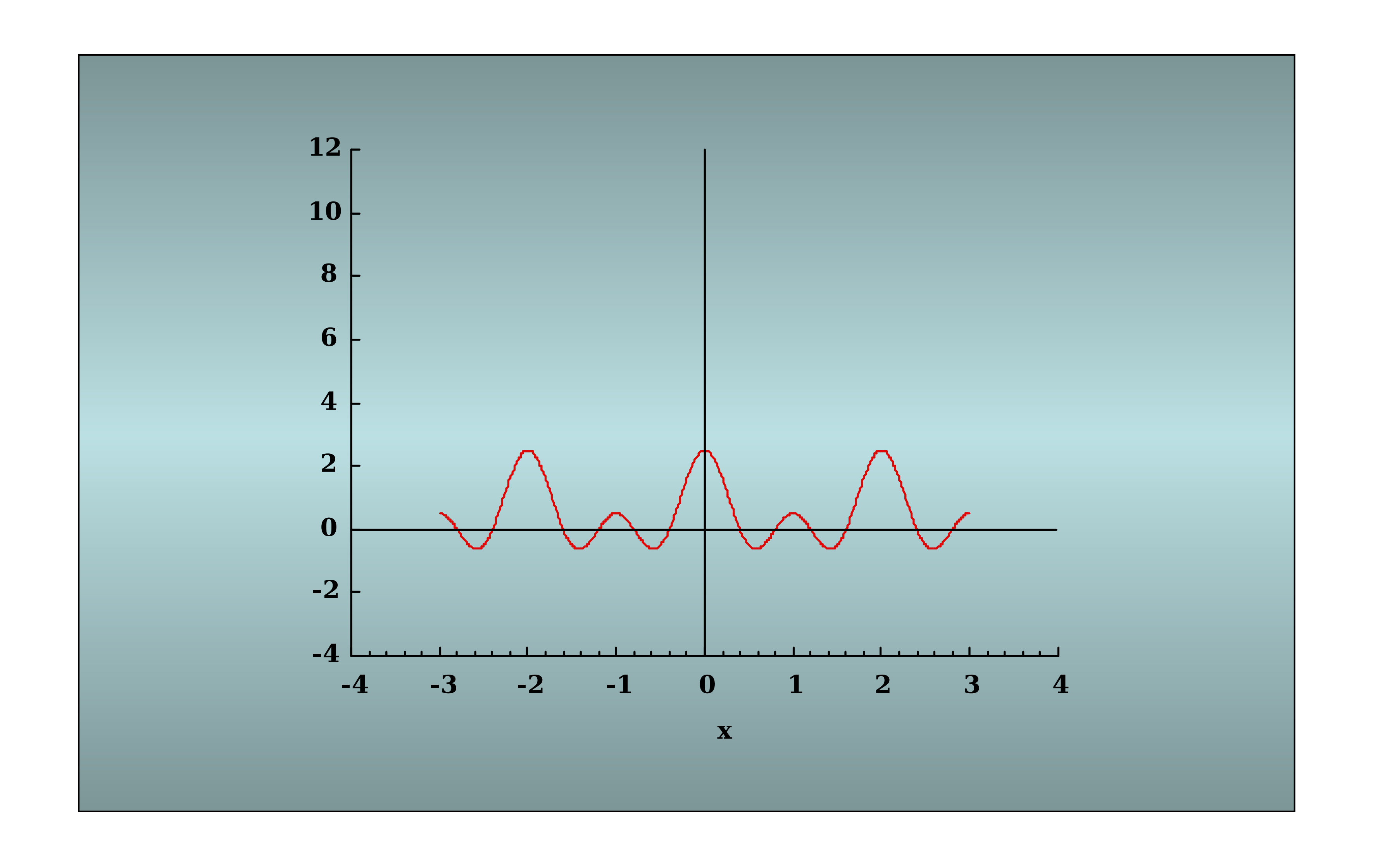
Para todas las x ≠ 0 la función delta vale 0

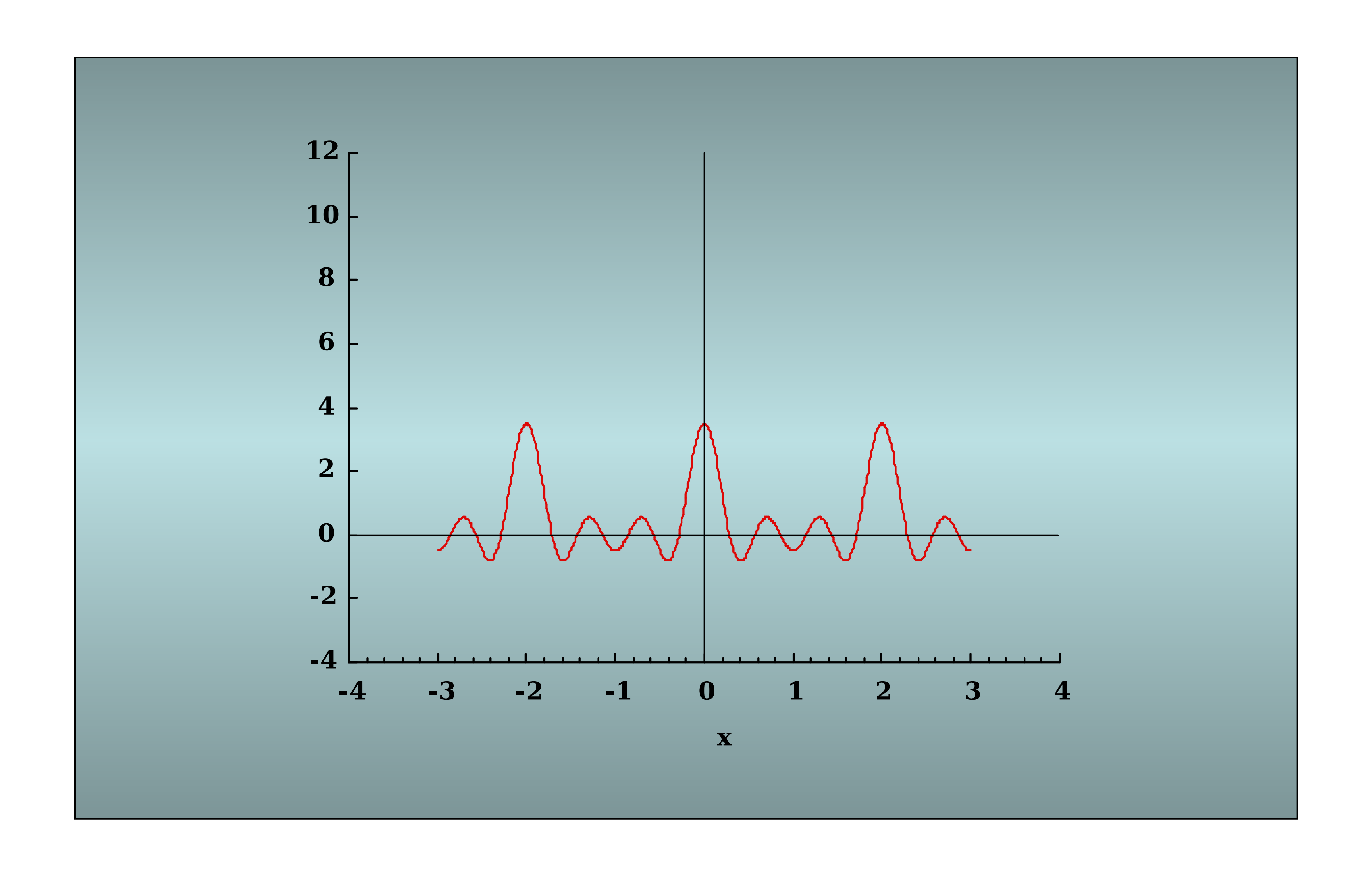
$$c_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \delta(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

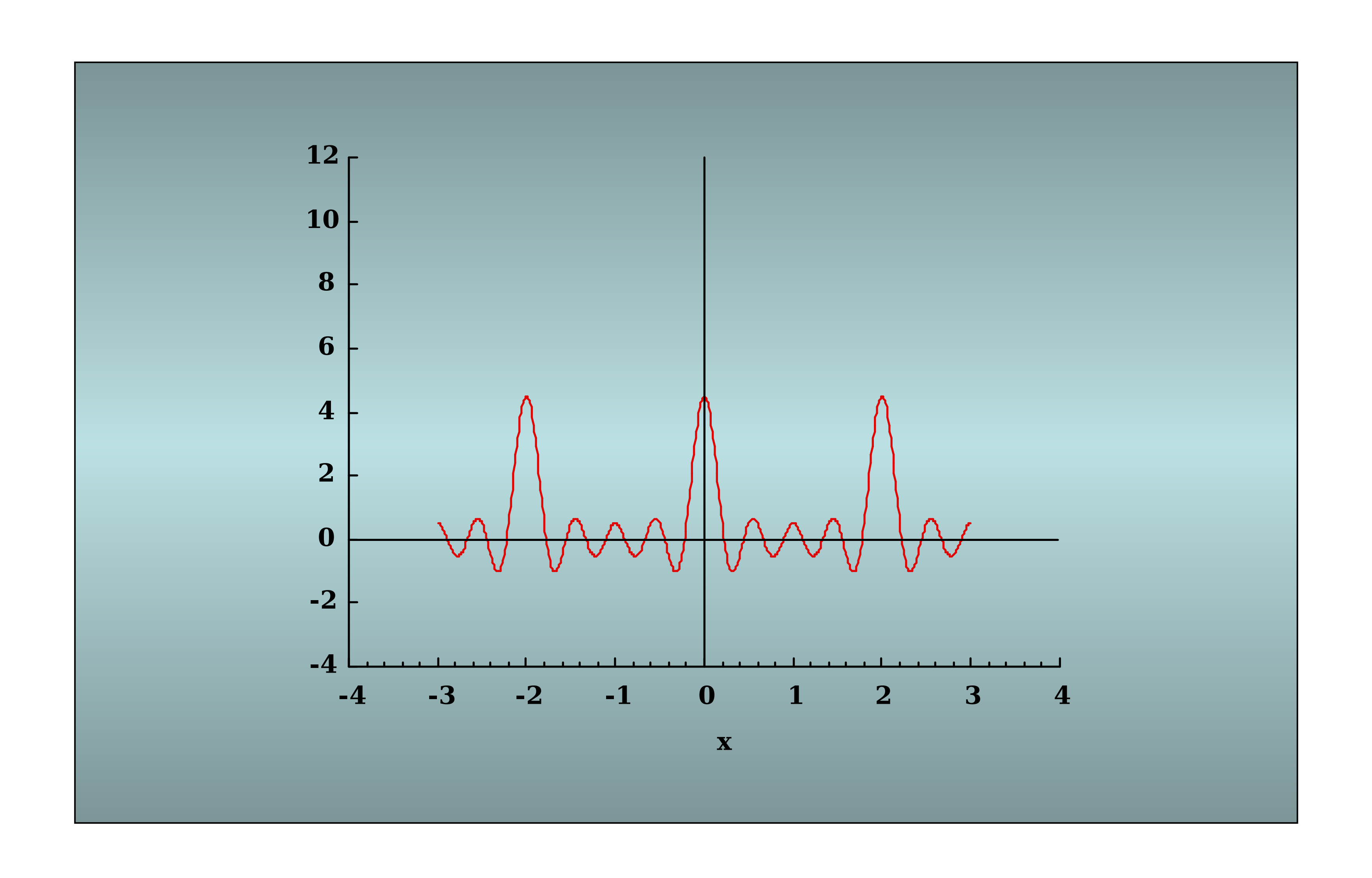
$$\delta(x) = C_0 + \sum_{j\neq 0=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{i\pi jx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j>0} \left(e^{-i\pi jx} + e^{i\pi jx}\right)$$

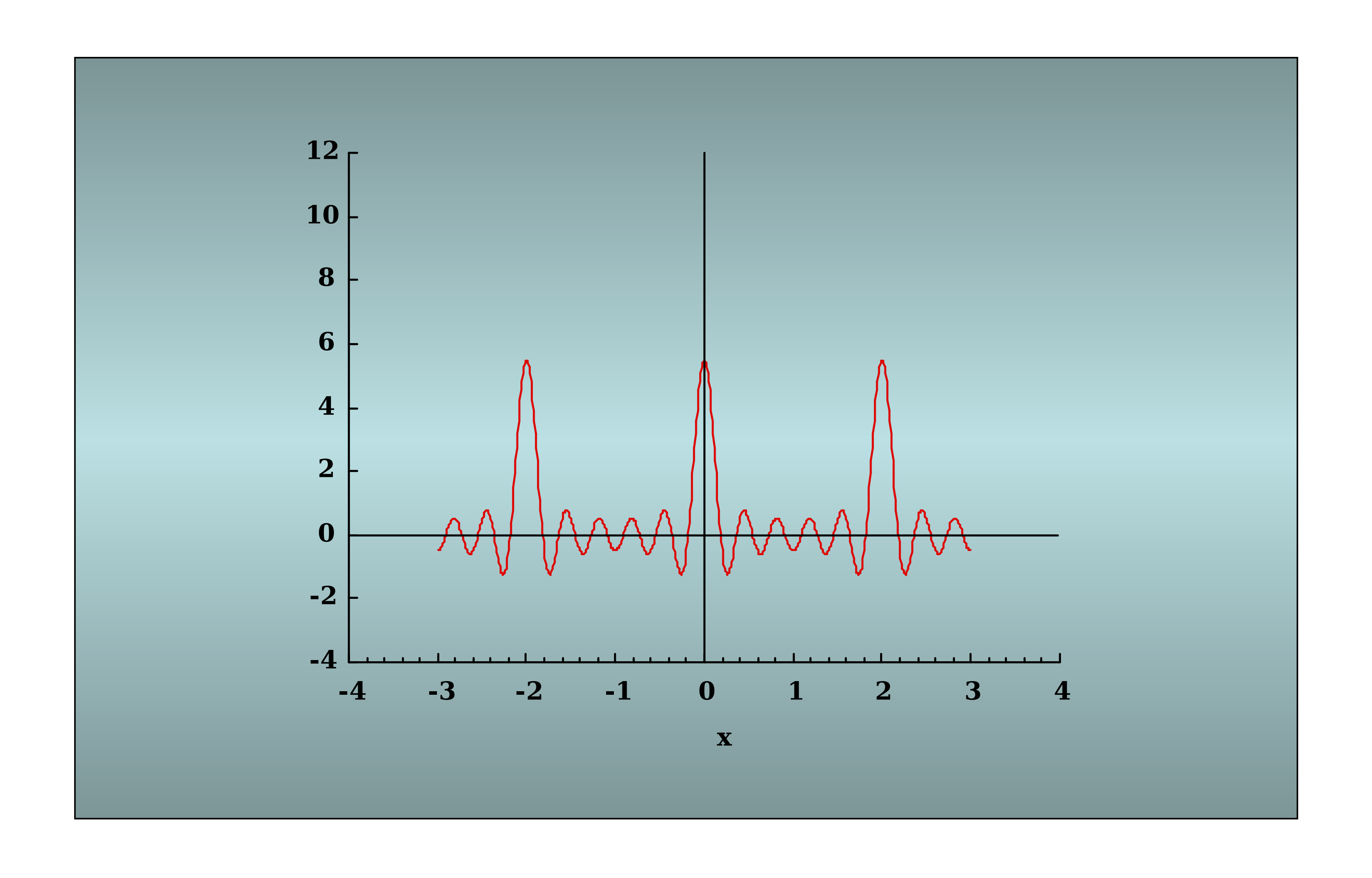
$$\delta(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j>0} \cos(\pi jx)$$

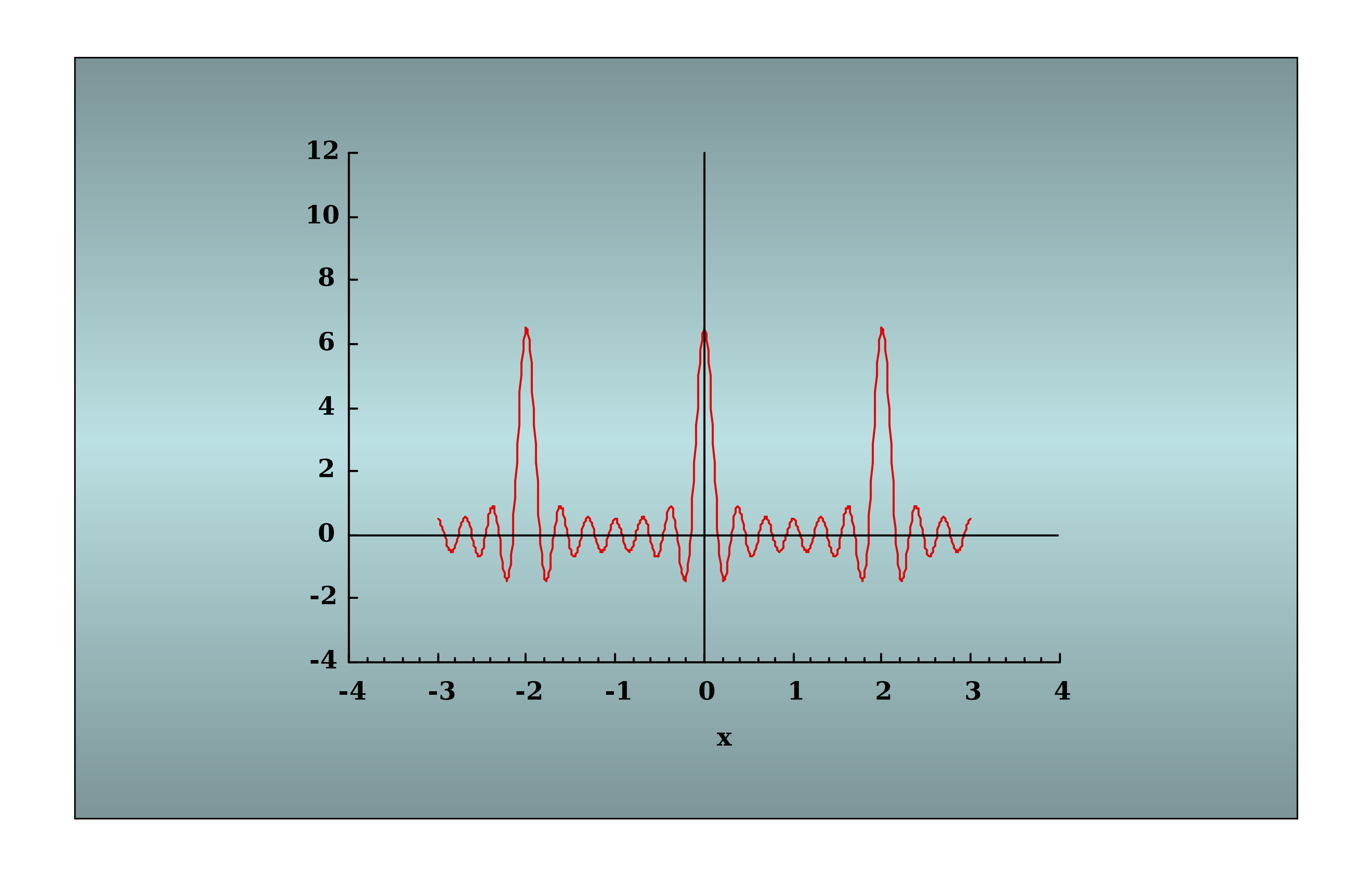

12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x

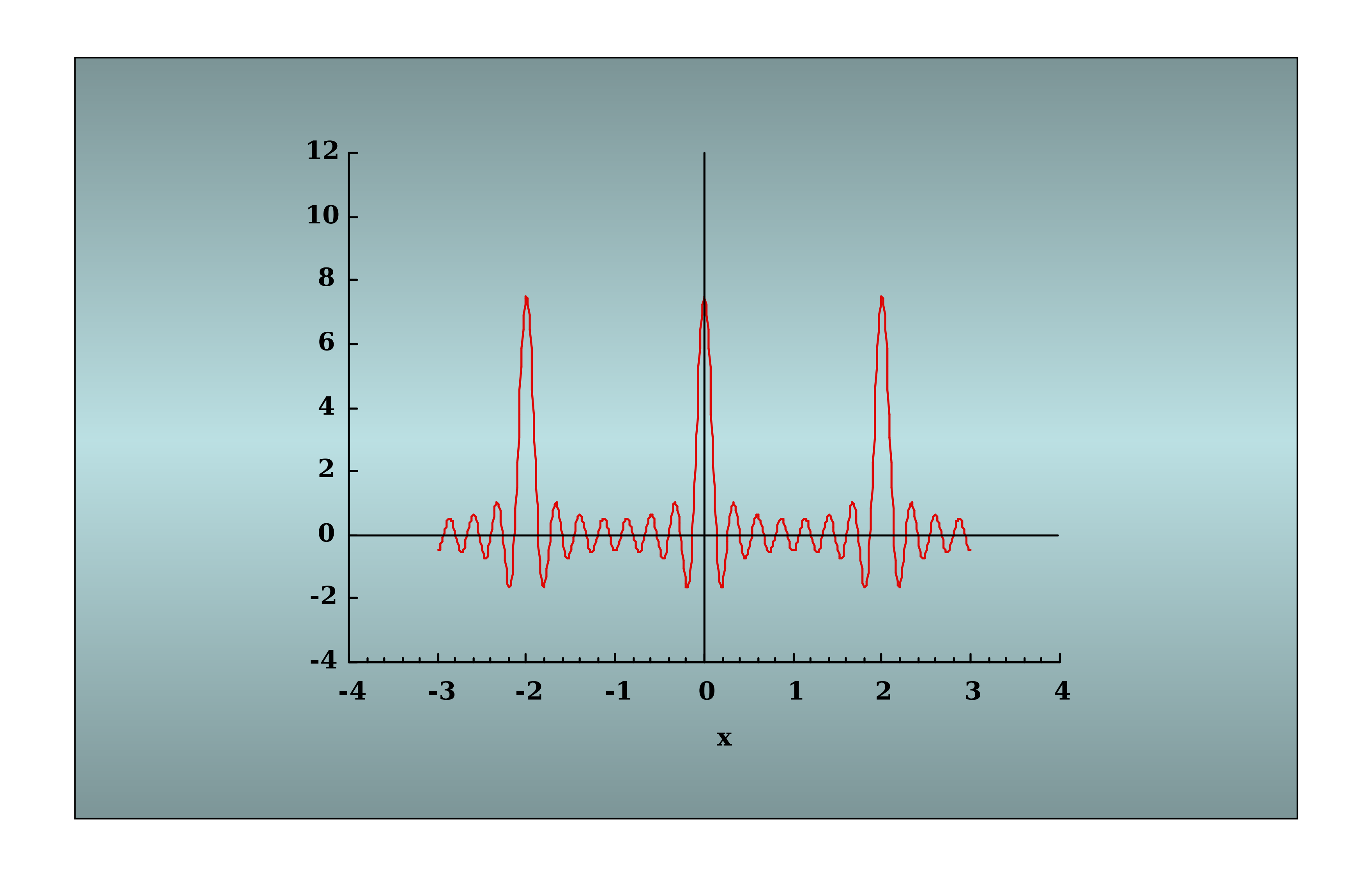

12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x

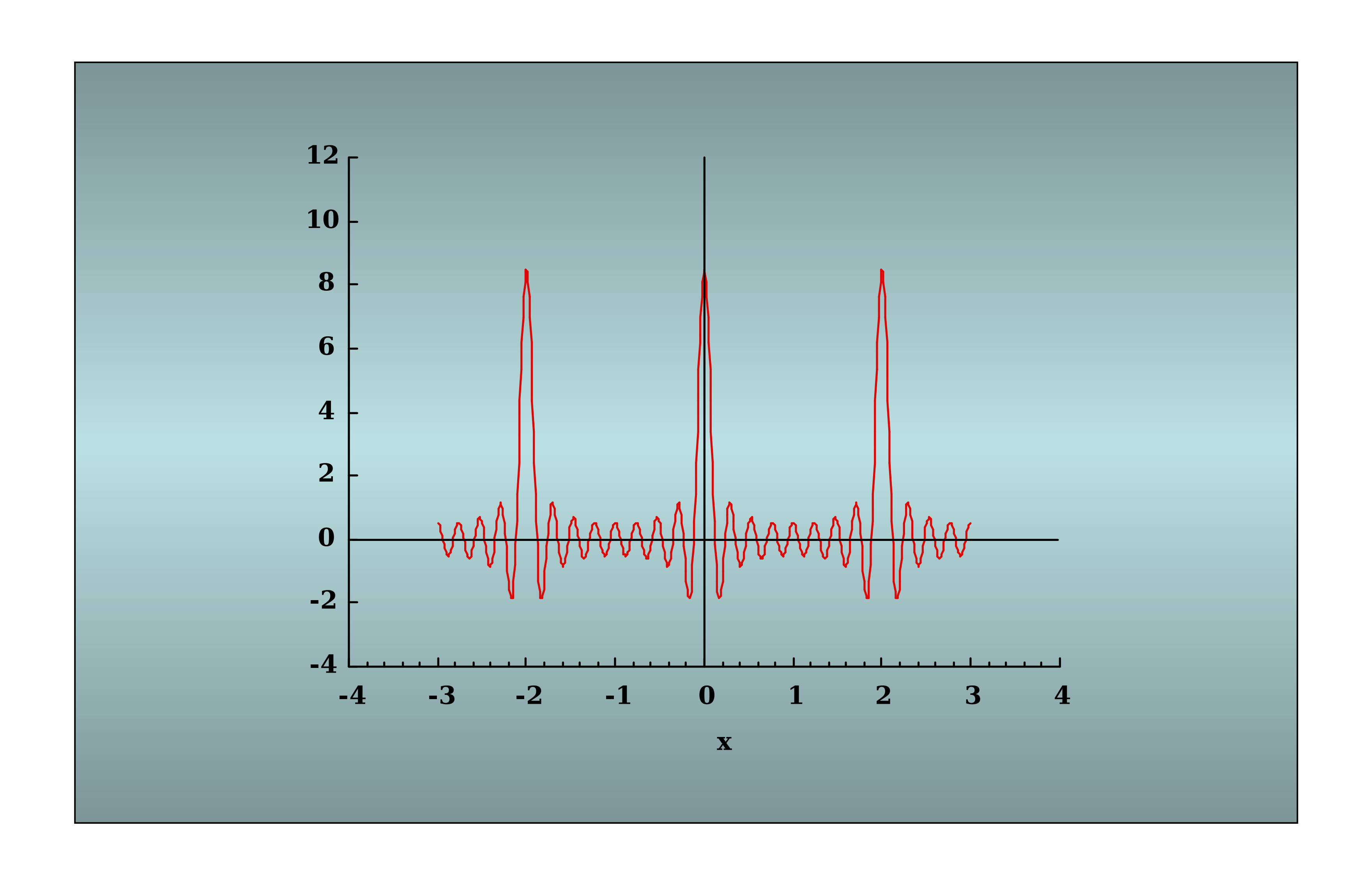

12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
x

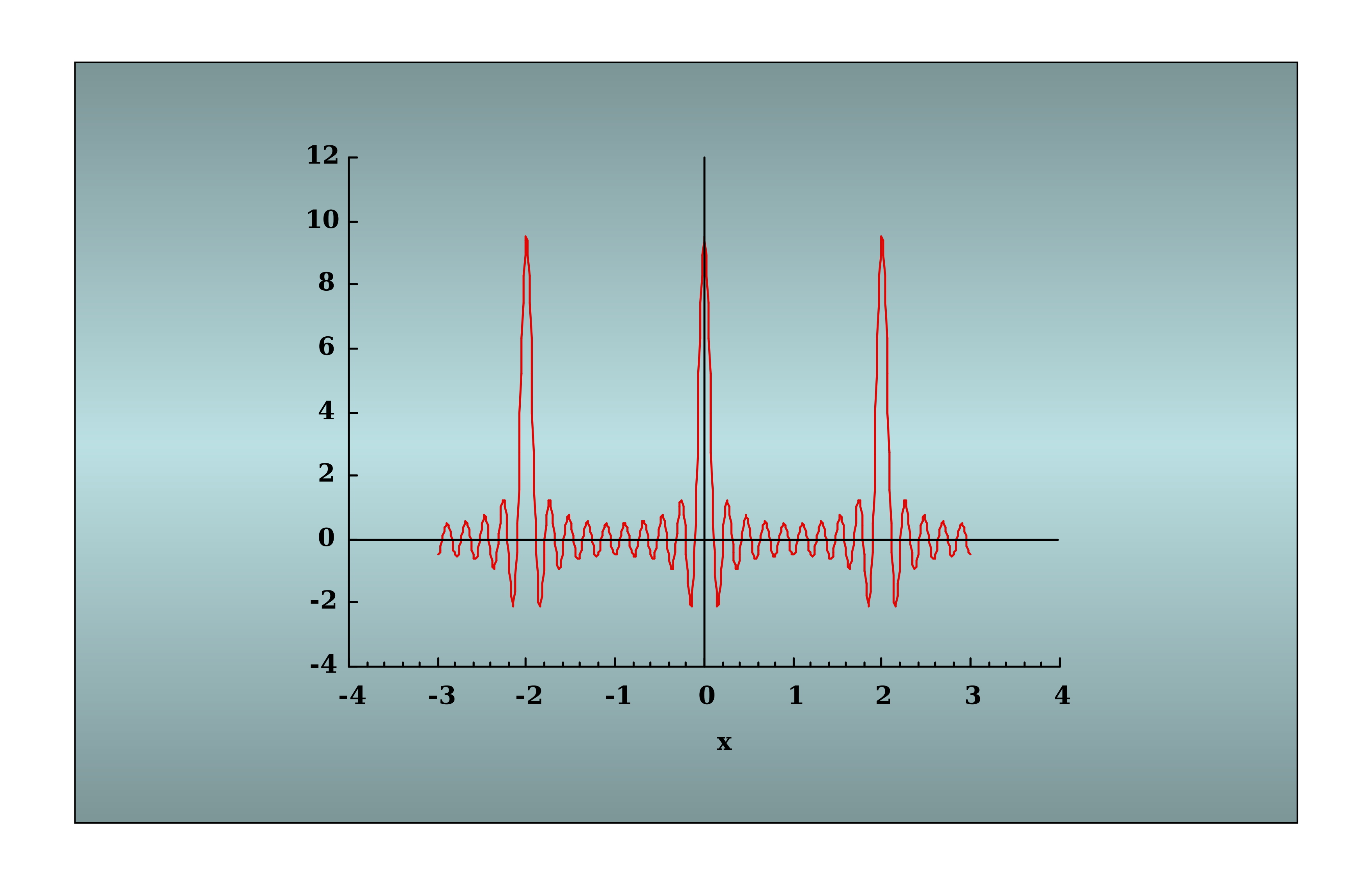

12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x

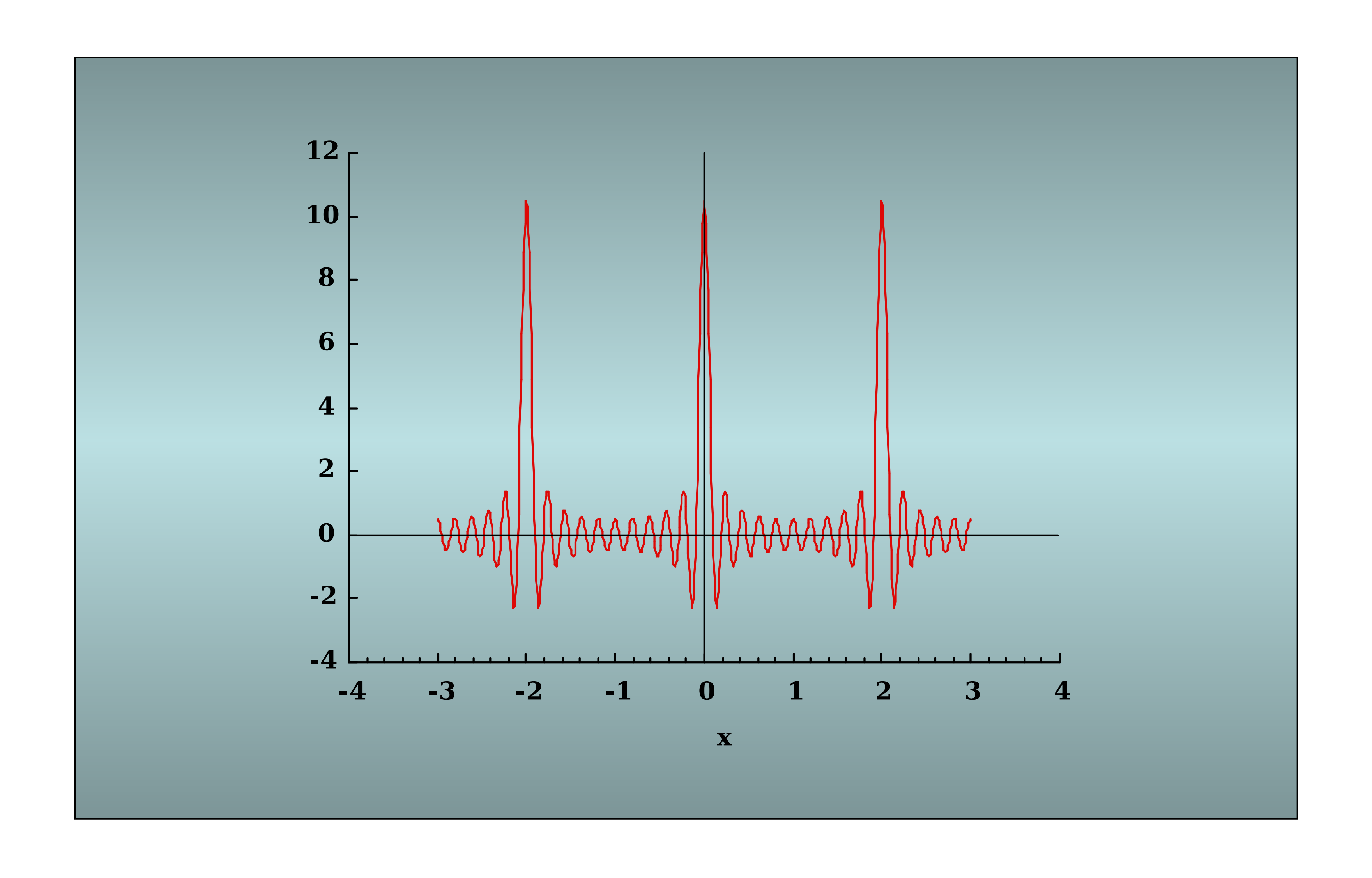

12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
x


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x